

# Alcuni appunti sullo SQUID

Lo **SQUID** è uno strumento superconduttore capace di una misura sensibile ed accurata del campo magnetico.

Introduro' in queste lezioni alcuni concetti relativi a:

- [Superconduttività](#)
- [Sistemi quantistici macroscopici](#)
- [Giunzione Josephson](#)
- [SQUID DC](#)
- [SQUID RF](#)
- [Applicazioni](#)

Testi di consultazione:

J.C. Gallop - SQUIDS, the Josephson Effects and Superconducting Electronics

Barone e Paternò - Physics and Applications of the Josephson Effect.

J.P Burger - La Supraconductivité des métaux, des alliages et des films minces

R.P. Feynmann et al. - The Feynmann lectures in Physics, Vol 3

## SUPERCONDUTTIVITA'

Fenomeno che si verifica a bassa temperatura (  $< 130 \text{ K}$  ) in:

- Metalli puri
- Composti intermetallici
- Leghe
- Ossidi ( YBCO, BSCCO )
- *Materiali organici*

# KNOWN SUPERCONDUCTIVE ELEMENTS

■ BLUE = AT AMBIENT PRESSURE  
■ GREEN = ONLY UNDER HIGH PRESSURE

1	2																	10					
1	2																	10					
3	4																	5	6	7	8	9	10
11	12																	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36						
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54						
55	56	57	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86						
87	88	89	104	105	106	107	108	109	110	111	112												

SUPERCONDUCTORS.ORG

\* Lanthanide  
Series

+ Actinide  
Series

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103

Un materiale nello stato Superconduttore ha:

- **Resistenza elettrica nulla** (  $\leq 10^{-23} \Omega \text{cm}$ , tempi  $T > 10^6 \text{ y}$  )
- **Diamagnetismo perfetto** (Espulsione completa e reversibile del campo magnetico dal proprio interno)

La superconduttività si verifica al di sotto di:

- Una temperatura critica  $T_c$
- Un campo magnetico critico  $H_c(T)$
- Una corrente critica  $J_c$

$T_c$  massimo = 135 K

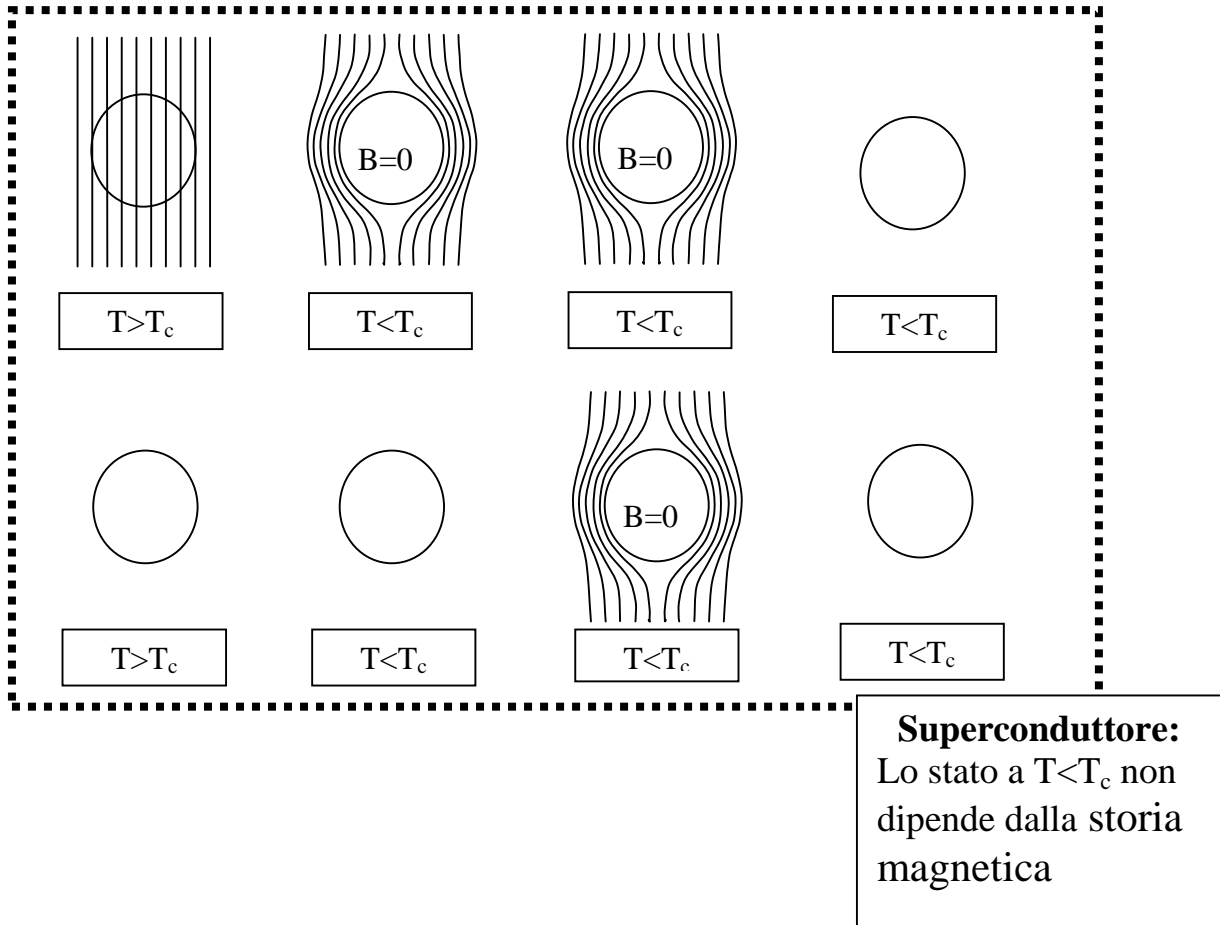
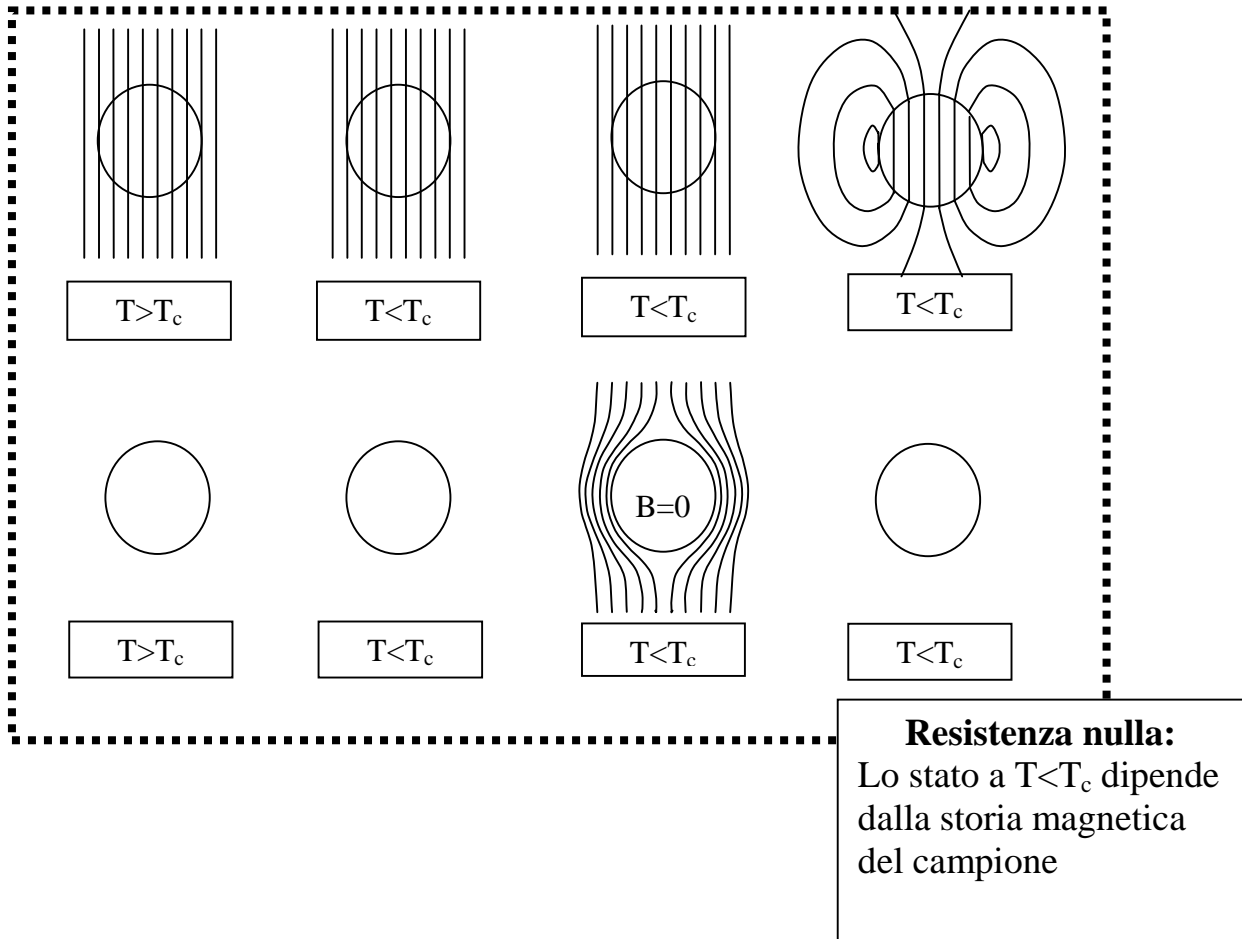
$H_{c2} \gg 200$  Tesla

$J_c \sim 10^7 \div 10^8$  A/cm<sup>2</sup> in un S/C tradizionale

La superconduttività, scoperta nel 1911 da Kamerlingh Onnes nel caso del mercurio, ha avuto una spiegazione teorica negli anni 50 con la teoria BCS (Bardeen , Cooper, Schieffer 1956 ) e con la comprensione dei Superconduttori di II tipo ( anni 50-60) suscettibili di applicazioni di potenza.

La scoperta e lo sviluppo del tunneling tra superconduttori e dell' effetto Josephson si verificano negli stessi anni ( Josephson 1962 ).

La superconduttività ad alta temperatura viene scoperta nel 1987 a Zurigo (IBM) da Bednorz e Muller.



## Coppie di Cooper

Nei Superconduttori la corrente non è condotta da elettroni come nei metalli o da elettroni e lacune come nei Semiconduttori, ma da coppie di elettroni che interagiscono tra di loro mediante il reticolo, che si comportano come mezzo di attrazione tra gli elettroni invece che come ostacolo al loro moto.

Le coppie di Cooper sono Bosoni, e quindi possono condensare in uno stesso stato.

## Gap

L'energia di condensazione in uno stato accoppiato fa sì che sia necessaria un'energia finita per rompere una coppia e creare due elettroni "normali". Lo spettro energetico del Superconduttore presenta quindi un gap d'energia.

Si ha una relazione, almeno approssimata tra il gap e la temperatura critica:

$$\frac{2 \cdot \Delta(0)}{K \cdot T_c} = 3.6 \div 4.3$$

N.B.: 5K  $\rightarrow$  0.4 meV.

## Conseguenze termodinamiche

- ❖ L'entropia diminuisce
- ❖ La conducibilità termica diminuisce
- ❖ Il calore specifico tende a zero esponenzialmente
- ❖ La transizione a B=0 avviene con calore latente, ed è una transizione di II ordine

## Funzione d' onda macroscopica

Nei superconduttori il comportamento elettromagnetico si può descrivere con una funzione d' onda quantistica, che descrive tutti gli elettroni accoppiati in un unico stato.

Un Superconduttore è un sistema macroscopico che segue le leggi della meccanica quantistica.

$$\Psi = \sqrt{\rho} e^{j\phi}$$

Se molte particelle sono nello stesso stato

- $\Psi\Psi^*$  probabilità
- $N\Psi\Psi^*$  densità
- $qN\Psi\Psi^*$  densità di carica (  $q = 2e$  )

La funzione d' onda segue l' equazione di Hamilton in campo magnetico:

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{j} \vec{\nabla} - q \vec{A} \right)^2 + q\phi \right] \psi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{J} = \frac{1}{2m} \left[ \psi^* \left( \frac{\hbar}{j} \vec{\nabla} - q \vec{A} \right) \psi + c.c. \right]$$

Un utile esercizio e' dimostrare che l'effetto Messner deriva da questa descrizione quantistica.

Nel superconduttore la relazione costituente non e' la relazione tra E e J, bensì una relazione che lega J ad A:

$$\vec{J} = \frac{q\rho}{m} \cdot \vec{A}$$

Le equazioni di Maxwell permettono quindi di dimostrare che nel S/C il campo decresce esponenzialmente dalla superficie e si annulla all'interno, e che la decrescita ha una scala detta "lambda" di London

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{\mu_0 q \rho}{m}}$$

Un'altra interessante proprietà è il fatto che il flusso di campo magnetico in un anello di Superconduttore è **QUANTIZZATO**.

Il flusso di campo magnetico contenuto in un "buco" circondato da Superconduttore deve essere un multiplo di  $\Phi_0$  (quanto di flusso) che vale  $2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2$

Nota: anche la penetrazione del campo magnetico nei Superconduttori di **II tipo** avviene in forma di "tubi di flusso" (flussoni) contenenti un quanto  $\Phi_0$

L'effetto Meissner si può ricavare considerando che nello stato stazionario

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Con  $\vec{J} \cdot \hat{n} = 0$  sulle superfici

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{m} \nabla^2 \varphi - \frac{q}{m} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Nella Gauge di Coulomb

$$\Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\nabla \varphi \cdot \hat{n} = 0$$

*soluzione*

$$\varphi = \cos t \Rightarrow \nabla \varphi = 0$$

La conclusione è l'equazione di London:

che nel superconduttore rimpiazza la legge di Ohm.

Valgono comunque le equazioni di Maxwell che legano campo e corrente

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{J} = \frac{q\rho}{m} \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad \text{che, usando} \quad \vec{J} = \frac{q\rho}{m} \vec{A}$$

*diventa*

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 q \rho}{m} \vec{A}$$

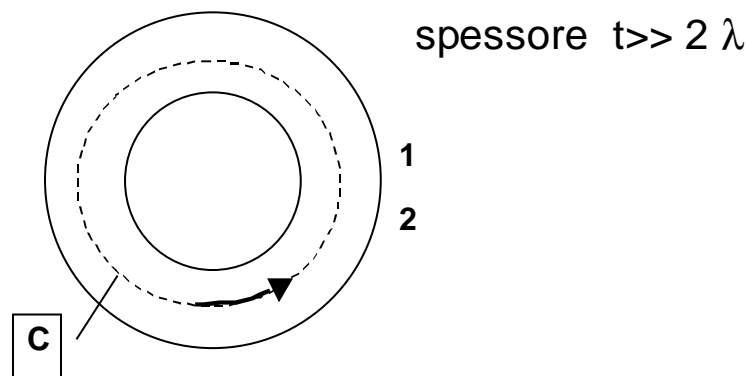
Riducendosi in una dimensione a considerare la superficie tra un S/C ad  $x < 0$  e lo spazio vuoto a  $x > 0$ , vediamo che le soluzioni fisicamente

significative ( non divergenti ) sono per  $A_\phi$ ,  $B$  e  $J$  esponenziali che si azzerano nel corpo del Superconduttore.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_\phi = \frac{\mu_0 q \rho}{m} A_\phi = \frac{1}{\lambda_L^2} A_\phi$$

$$A_\phi = A_0 e^{\frac{x}{\lambda_L}}$$

La quantizzazione del flusso in un tubo di Superconduttore si dimostra facilmente per un tubo di spessore  $\gg 2 \lambda_L$  in cui consideriamo un percorso chiuso su cui corrente (e campo) siano nulli per le considerazioni precedenti.



Poichè l'anello ha resistenza nulla, se applichiamo un campo esterno  $\mathbf{H}$  il flusso concatenato non cambierà per la legge di Lenz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Però non si deduce la quantizzazione del flusso, effetto quantistico valido solo per il Superconduttore.

Invece partendo dall'equazione di London e dall'effetto Meissner per cui su  $\mathbf{C}$   $J = 0$ :

$$\hbar \vec{\nabla} \varphi = q \vec{A}$$

$$\hbar \oint \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} = q \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = q \Phi_B$$

$$\oint \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} = \varphi_2 - \varphi_1$$

La funzione d'onda  $\psi = \sqrt{\rho} e^{j\varphi}$  è ad un solo valore purchè  $\varphi$  cambi di  $2\pi$  in un giro.



Si ha allora:

$$2n\pi\hbar = q\Phi_B$$

$$\Phi_B = 2n \frac{\pi\hbar}{q} = n\Phi_0$$

$$\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Gauss cm}_2 = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Weber}$$

## Flussoni

I superconduttori di II tipo, in genere materiali di alta resistività nello stato normale, permettono l'ingresso del campo magnetico in uno stato "misto" in cui tubi di materiale "normale" sono circondati da una spugna connessa di materiale Superconduttore.

Grazie alla quantizzazione del flusso, I tubi di flusso o flussoni, si comportano come entità stabili, che interagiscono tra di loro e con I difetti del materiale. Ognuno di questi flussoni contiene un "quanto di flusso"  $\Phi_0$

Nello stato misto

$$\langle B \rangle \neq 0 \quad e \quad \langle B \rangle = n\Phi_0$$

## EFFETTO JOSEPHSON

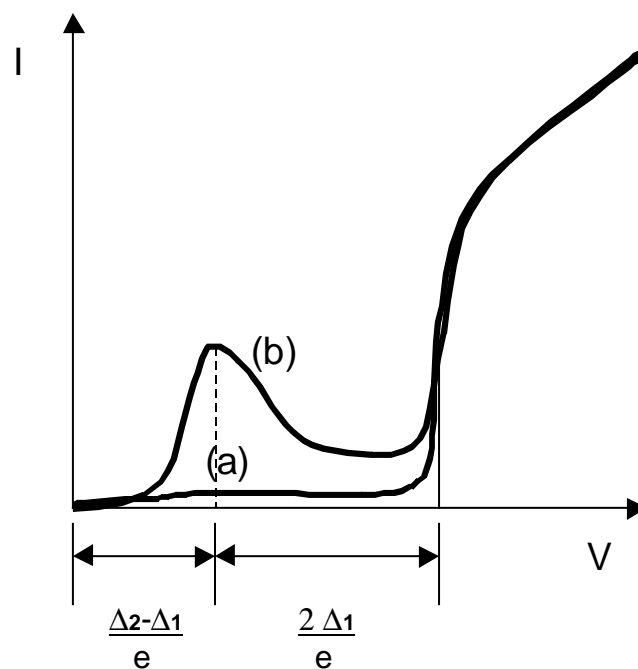
Due Superconduttori separati da un sottile strato di isolamento ( barriera o giunzione ) possono lasciar passare corrente per effetto tunnel. Tra i superconduttori possiamo realizzare due tipi di giunzioni, a seconda della forza dell'accoppiamento, che rappresentano fenomeni fisici diversi e si comportano in modi molto diversi.

- Giunzione Giavier ( tunneling normale )
- Giunzione Josephson ( tunneling quantistico )

Una debole connessione tra superconduttori è molto utile in quanto realizza un disositivo non lineare con bassi livelli di tensione e corrente, e quindi può essere impiegato come dispositivo elettronico di altissima sensibilità e minima potenza.

Giunzione Giavier: Spessore barriera  $> 30 \text{ \AA}$

La presenza di un GAP d'energia di valore  $2 \Delta$  nello spettro energetico della banda di conduzione, e l'aumento della densità degli stati ai bordi del gap stesso, determinano il caratteristico andamento della curva corrente-tensione mostrata qui sotto per una coppia S-I-S con elettrodi uguali (a) e diversi (b).



Josephson, nel 1962 predisse, e nel 1963 Anderson verificò, che per barriere abbastanza sottili, si può avere passaggio di corrente con resistenza nulla tra i due Superconduttori, per una limitata corrente  $I_j$ .

### Giunzione Josephson: Spessore barriera $< 10 \text{ \AA}$

Possiamo considerare il mixing tra le funzioni d'onda dei due superconduttori, che si estendono nell'isolante con una decrescita esponenziale.

Per ricavare le due equazioni di Josephson si può usare il metodo dell'Hamiltoniana di tunneling (vedere Feynman).

2 equazioni di Schroedinger accoppiate per i S/C di destra **R** e sinistra **L**.

$$\begin{cases} j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_R = E_R \Psi_R + K \Psi_L \\ j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_L = E_L \Psi_L + K \Psi_R \end{cases}$$

con  $E = 2\mu$  (potenziale chimico) e  $E_L - E_R = 2eV$

esplicitando la fase e l'ampiezza della funzione d'onda,  $\Psi = \sqrt{\rho} e^{j\varphi}$

e separando poi la parte reale e la parte immaginaria delle equazioni si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_L}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_L \rho_R} \sin(\varphi) \\ \frac{\partial \rho_R}{\partial t} = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_L \rho_R} \sin(\varphi) \end{cases}$$

in cui la variazione temporale della  $\rho$  rappresenta la corrente entrante o uscente dagli elettrodi e

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_L}{\partial t} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}} \cos(\varphi) + \frac{eV}{\hbar} \\ \frac{\partial \varphi_R}{\partial t} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_R}} \cos(\varphi) - \frac{eV}{\hbar} \end{cases}$$

Da questi sistemi troviamo che nella giunzione si hanno due relazioni tra la fase della funzione d'onda e la corrente o la tensione date da:

- 1<sup>a</sup> equazione di Josephson (effetto Josephson in DC)

$$J = J_j \cdot \sin(\varphi)$$

con  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

- 2<sup>a</sup> equazione di Josephson ( effetto Josephson in AC )

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2 \cdot e}{\hbar} V$$

la costante di proporzionalità vale 483.6 MHz/μV.

Se consideriamo l'effetto combinato della I e II equazione di Josephson in una giunzione, vediamo che una tensione costante fa variare linearmente la fase, e che la corrente in conseguenza oscilla.

La frequenza di tale oscillazione dipende da costanti fisiche fondamentali, e vale

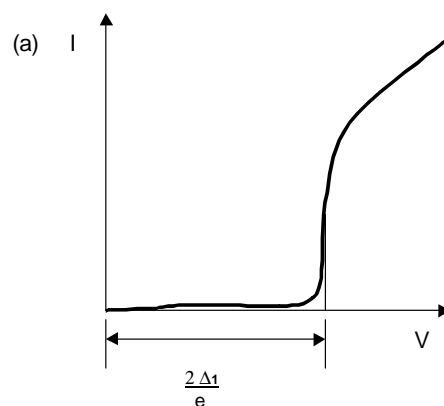
$$\nu = \frac{2eV}{\hbar} = 483.6 \frac{\text{MHz}}{\mu\text{V}}$$

Devo poi almeno citare il fatto che la corrente che può circolare in una giunzione con tensione nulla dipende dal campo magnetico concatenato con essa.

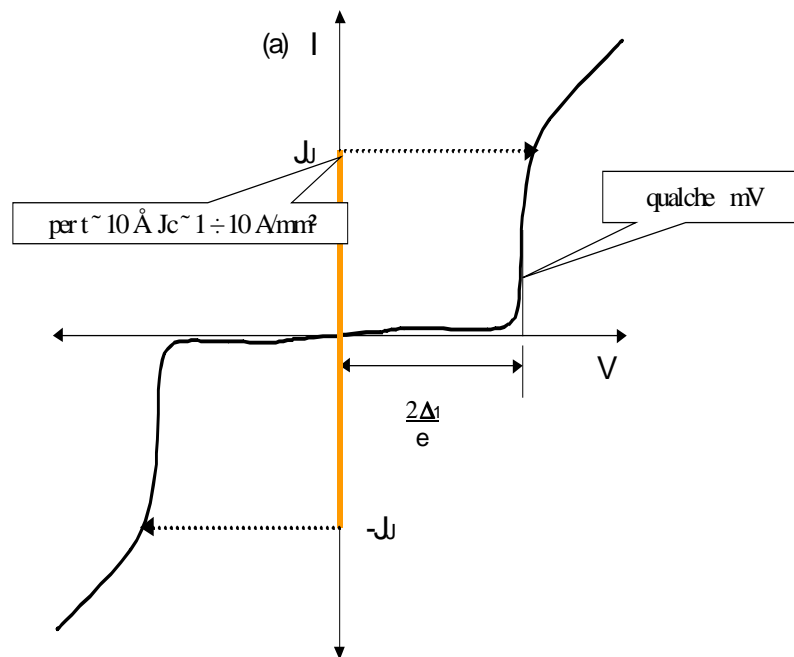
$$I_1(H) = I_1(0) \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}} \right|$$

### Comportamento complessivo **reale** di una giunzione

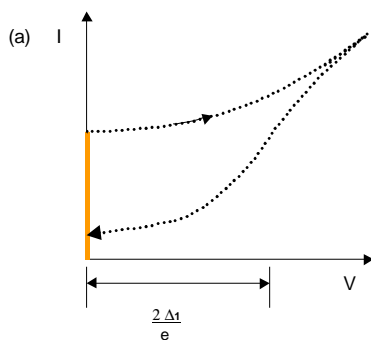
- giunzione Giavier



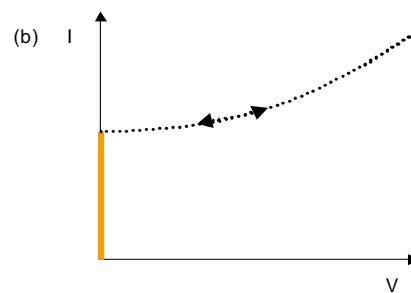
- giunzione Josephson con bassa capacità



- giunzione Josephson con capacità



**Figura : Isteretico**



**Figura b: non isteretico**

## SQUID

La sigla **SQUID** significa **S**uperconducting **Q**uantum **I**nterference **D**evice.

L' apparecchio è basato sulla Superconduttività e sulla interferenza quantistica poichè il comportamento degli elettroni è descritto da un' onda, che subisce interferenza e diffrazione nelle giunzioni.

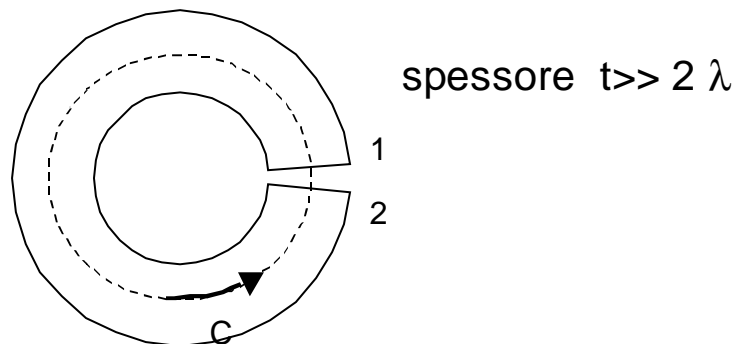
Sono stati sviluppati due tipi di SQUID:

- [SQUID RF](#)
- [SQUID DC](#)

## RF SQUID

Lo SQUID RF viene solitamente realizzato con un anello di Superconduttore interrotto da una singola giunzione Josephson.

Vogliamo innanzitutto capire il comportamento di tale anello quando gli applichiamo una induzione esterna.



Nella giunzione la corrente è

$$I = I_0 \sin(\Delta\varphi)$$

Dove è la differenza di fase tra i due lati della JJ

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Nel S/C

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{m} \left( \vec{\nabla} \varphi - \frac{q}{\hbar} \vec{A} \right) \rho$$

Sul percorso interno non scorre corrente  $J = 0$  e quindi

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{q}{\hbar} \vec{A}$$

Se calcolo l'integrale di linea su C di questa relazione trovo:

$$\int_1^2 \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{\hbar} \int_1^2 \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

considerando lo spessore trascurabile della giunzione, considero l'integrale di A come circuitazione, per cui ottengo

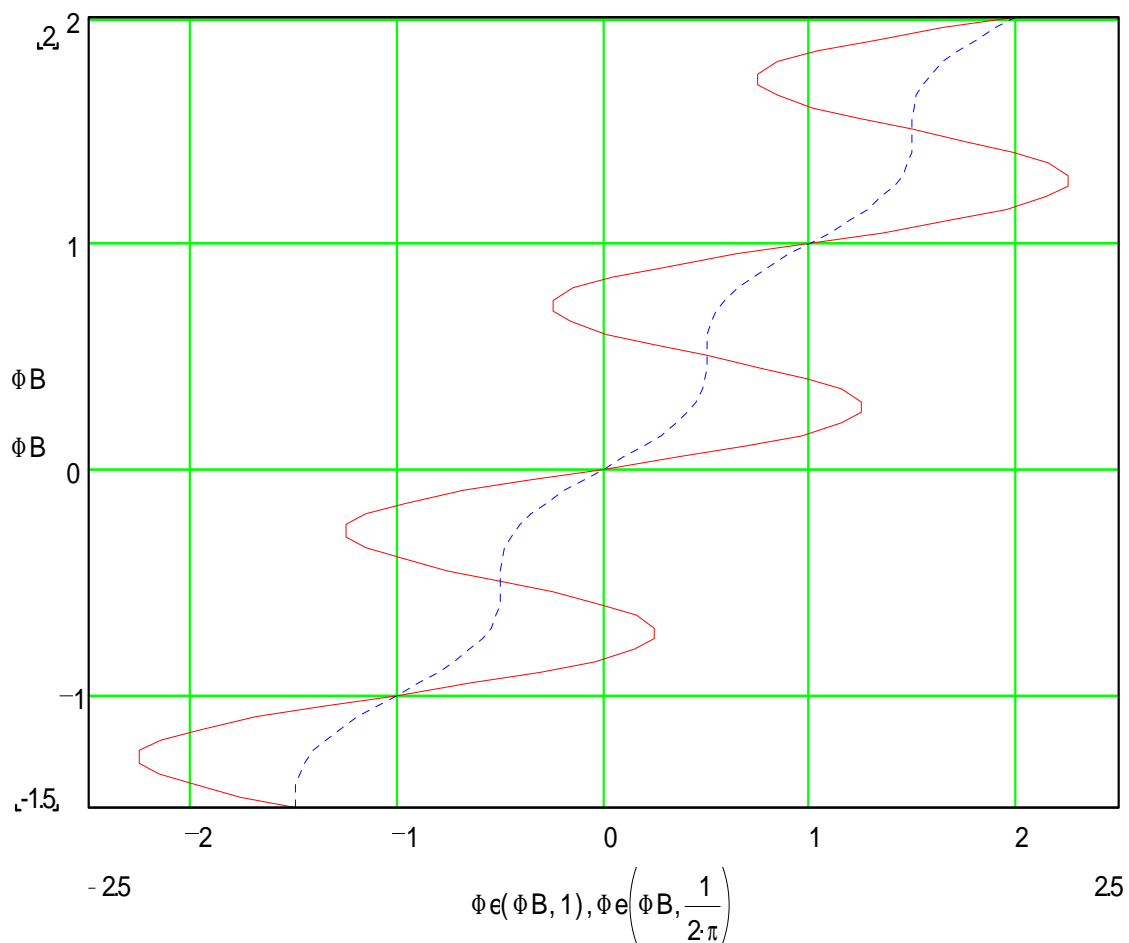
$$\Delta \varphi \approx \Delta \varphi^* = \varphi_2 - \varphi_1 + \int_2^1 \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\hbar} \Phi_B = 2\pi \frac{\Phi_B}{\Phi_0}$$

e la corrente nella giunzione Josephson viene a dipendere dal flusso.

$$I = I_0 \sin \left( 2\pi \frac{\Phi_B}{\Phi_0} \right)$$

Se ad una spira ( lo SQUID ) di induttanza  $L_s$

Applico un campo  $H_e$ , cioè un flusso  $\Phi_e$  il flusso concatenato  $\Phi_B$  diventa



$$\Phi_B = \Phi_e + L_S I$$

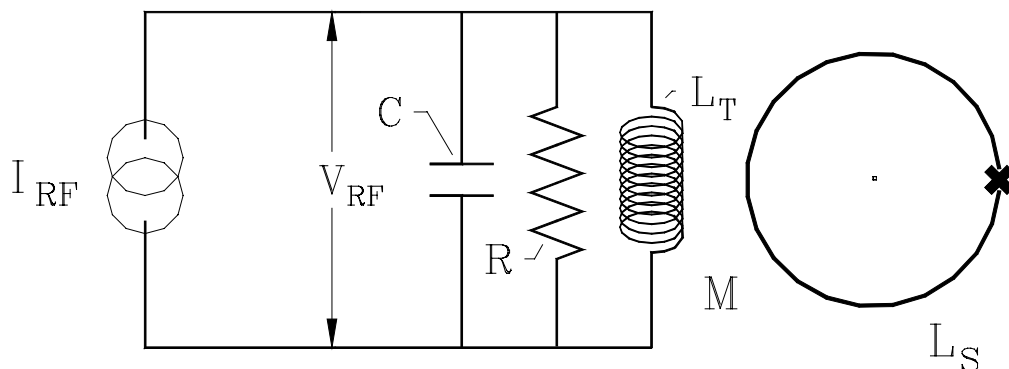
$$I = -I_0 \sin\left(2\pi \frac{\Phi_B}{\Phi_0}\right)$$

$$\Phi_B = \Phi_e - L_S I_0 \sin\left(2\pi \frac{\Phi_B}{\Phi_0}\right)$$

$$\Phi_e = \Phi_B + L_S I_0 \sin\left(2\pi \frac{\Phi_B}{\Phi_0}\right)$$

Il parametro  $\beta_e = \frac{2\pi L_S I_0}{\Phi_0}$  determina se la caratteristica sia isteretica o no.

Lo SQUID ad RF non ha terminali, ed è quindi necessario collegarsi ad esso induttivamente. Questo può essere fatto mediante un circuito risonante a Q moderato (50-100) la cui bobina sia accoppiata all'anello dello SQUID con una mutua induttanza M.



Le frequenze usate solitamente variano tra 20 MHz e 300 MHz.

L'induttanza equivalente del circuito  $L_{eff}$  risente dell'accoppiamento:

considerando l'anello come chiuso,  $L_{eff} = L_T (1 - k^2)$ .

Alla risonanza il segnale  $V_{RF}$  ai capi del circuito dipende solamente dalla resistenza "shunt". Tale resistenza coincide con  $R$  a bassi livelli di

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L_{eff}}$$

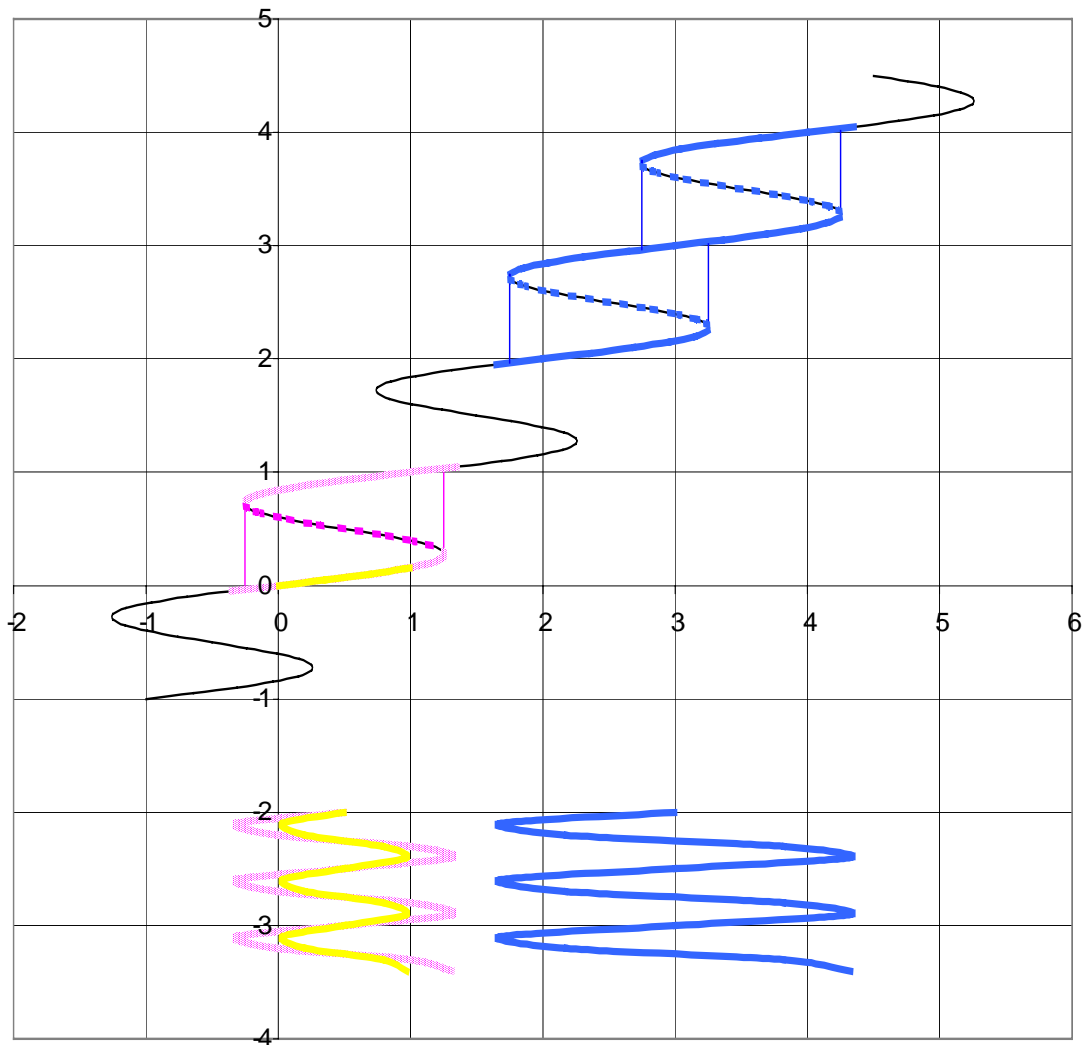
eccitazione, mentre ad alti livelli può essere ottenuta dal fattore di merito: considerando che il Q quantifica il rapporto tra dissipazione ed energia:

$$Q = \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{potenza dissipata per ciclo}}$$



In pratica, aumentando gradualmente l'ampiezza di eccitazione, la corrente oscillante a radiofrequenza aumenta come pure il flusso applicato.

La tensione ai capi del circuito risonante cresce anch'essa quasi linearmente.

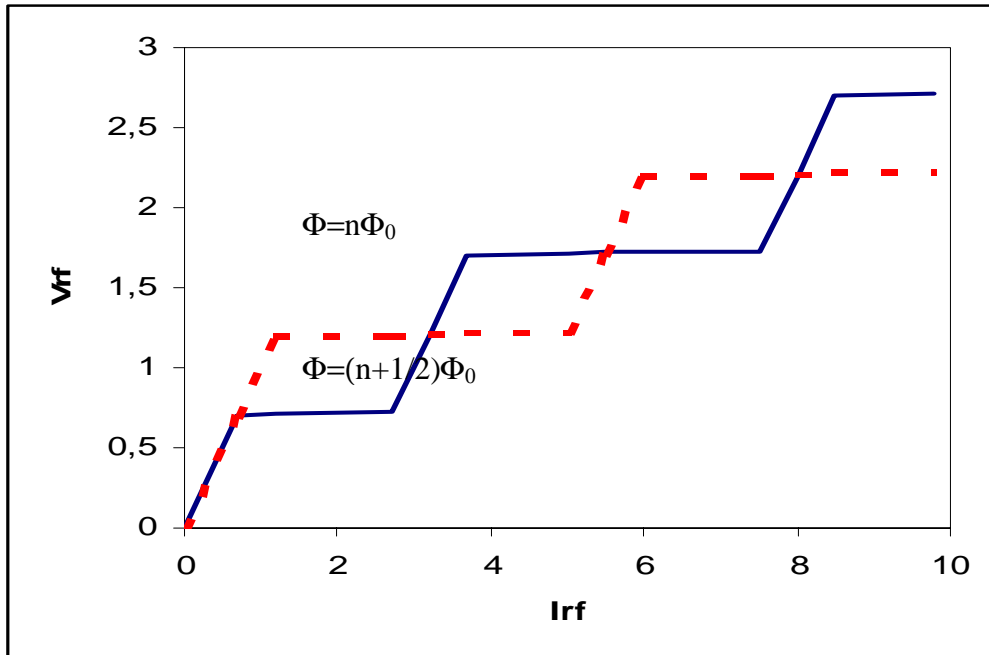


Il segnale in giallo indica questo comportamento nel caso sia applicato allo SQUID anche  $1/2 \Phi_0$ . A livelli più alti (curva viola) nell'anello entra ed esce un quanto di flusso. Il fatto di percorrere un ciclo d'isteresi corrisponde ad una dissipazione d'energia.

Quindi il  $Q \rightarrow R \rightarrow V_{RF}$  diminuiscono. In pratica la tensione  $V_{RF}$  si stabilizza senza diminuire, e si osserva un pianerottolo.

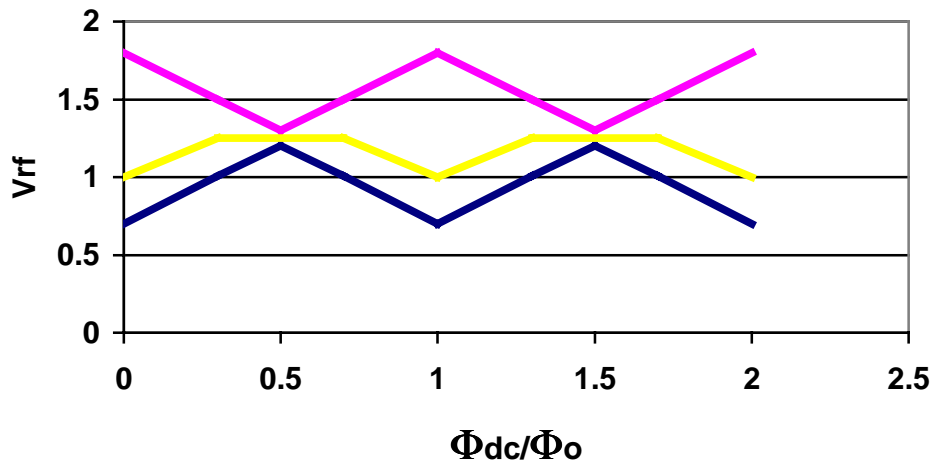
In seguito il segnale riprende a crescere, e si stabilizza nuovamente quando si cominciano a percorrere altri 2 cicli d'isteresi extra.

Se il flusso oscilla intorno ad un numero intero di quanti di flusso (3 nel caso indicato), la parte lineare persiste sino ad un livello più alto di RF, ma in seguito i cicli dissipati sono 2, 4, etc.



Se fissiamo  $I_{RF}$  ad un valore scelto correttamente (dove entrambe le curve presentano un pianerottolo), la dipendenza di  $V_{RF}$  dal flusso  $\Phi_{DC}$  applicato allo SQUID è periodica e triangolare.

La curva in giallo (distorta) è ottenuta a  $I_{RF}=3$ , la blu a  $I_{RF}=2$  e quella viola a  $I_{RF}=4$ .



# RF SQUIDS

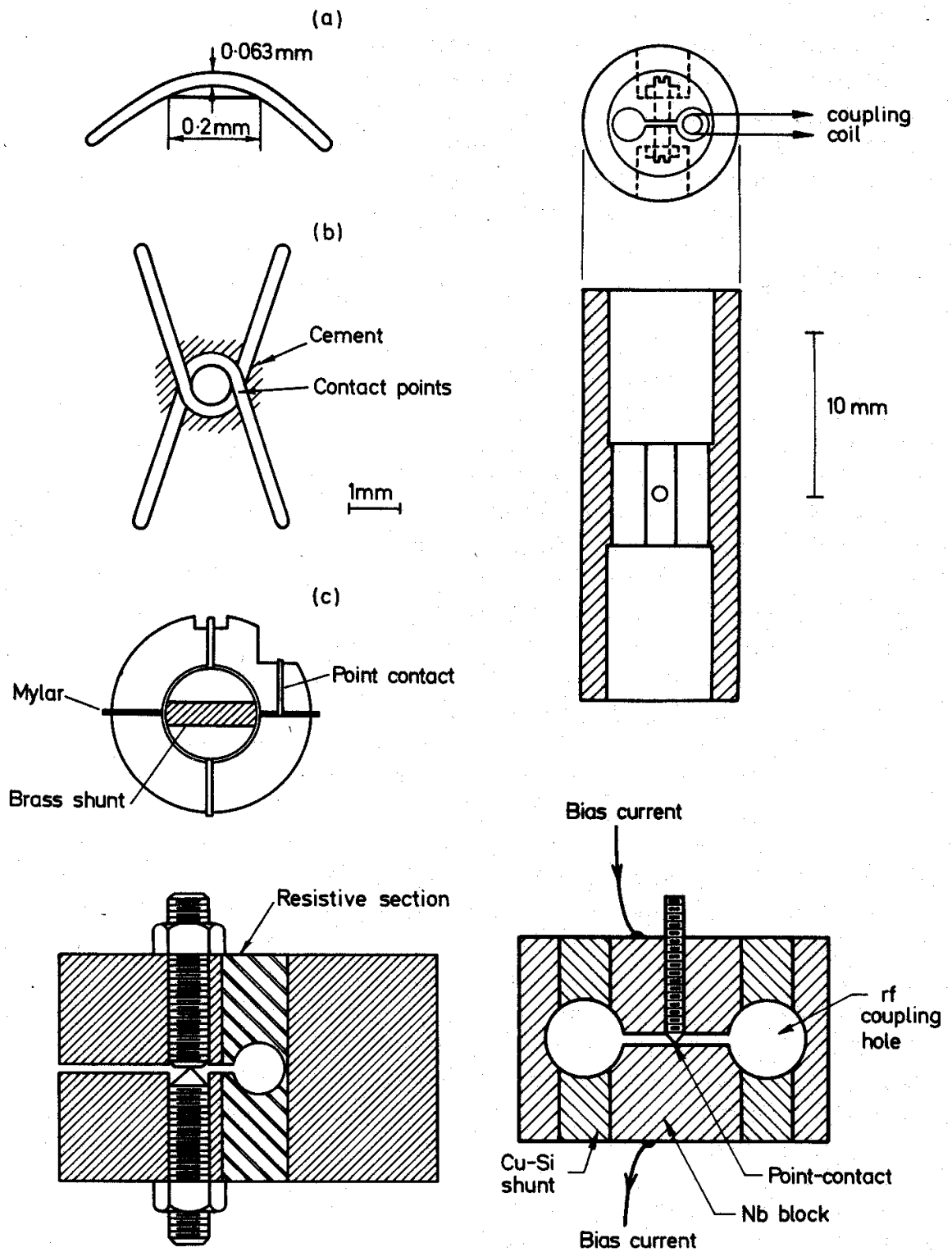


Fig. 15.3 Various realisations of point contact junctions: (a) ribbon in contact with bent wire, (b) pair of bent wires, (c) superconducting ring with a brass shunt; contact made through the Mylar layer, (d) stable mechanical arrangement compensated for differential thermal expansion (after Zimmerman *et al.* [435]), (e) stable symmetric structure (after Zimmerman *et al.* [435]), (f) stable symmetric structure with resistive insert (after Kamper and Zimmerman [538]).

## DC SQUID

Lo SQUID DC, realizzato di solito come struttura planare, consiste in un anello interrotto da 2 giunzioni, con elettrodi per l' iniezione della corrente.

La corrente massima che può passare a tensione nulla tra i due elettrodi, dipende dal flusso di campo magnetico applicato

La tensione ai capi del dispositivo segue la corrente critica a tensione nulla ed è anch'essa dipendente dal flusso applicato.

La periodicità della risposta deriva dalla quantizzazione del flusso, ed il periodo è  $\Delta\Phi = \Phi_0$ . Se nell' anello il flusso è un multiplo di  $\Phi_0$  la corrente critica è massima e la tensione minima. Il contrario si ottiene per  $\Phi = \Phi_0$

### Trattazione euristica ( ved Clarke )

Nell'anello, sottoposto ad una induzione magnetica esterna, circola una corrente di schermo, di valore

$$I = -\frac{\Phi_{ext}}{L}$$

Se porto la corrente di trasporto ad un valore  $I$ , essa si divide tra i due rami dello SQUID.

Le correnti totali nei due rami sono

$$I_1 = \frac{I}{2} + \frac{\Phi_{ext}}{L} \quad e \quad I_2 = \frac{I}{2} - \frac{\Phi_{ext}}{L}$$

La corrente critica totale dello SQUID si raggiunge quando in uno dei due rami si supera la corrente critica individuale. Cioè:

$$se \quad \Phi_{ext} > 0 \quad I_c = 2I_J - \frac{2\Phi_{ext}}{L}$$

$$se \quad \Phi_{ext} < 0 \quad I_c = 2I_J + \frac{2\Phi_{ext}}{L}$$

ma poiché la corrente circolante è periodica con periodo  $\Phi_0$  altrettanto periodica sarà la corrente critica totale.

## Interferenza tra 2 giunzioni

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = I_J \sin \Delta\varphi_1$$

$$I_2 = I_J \sin \Delta\varphi_2$$

$$I = I_1 + I_2 = I_J (\sin \Delta\varphi_1 + \sin \Delta\varphi_2)$$

Nei due Superconduttori vale la relazione:

$$\vec{J} = 0 = \frac{\hbar}{m} \left( \vec{\nabla} \varphi - \frac{q}{\hbar} \vec{A} \right) \rho$$

che da

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{q}{\hbar} \vec{A}$$

L'integrazione lungo la curva C permette di mettere in relazione il flusso concatenato e la differenza di fase:

$$\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = \frac{q}{\hbar} \Phi_B + 2n\pi$$

Sostituendo nelle equazioni per la corrente:

$$\begin{aligned} I &= I_J (\sin \Delta\varphi_1 + \sin \Delta\varphi_2) = \\ &= 2I_J \sin \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{2} \cos \frac{\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1}{2} = \\ &= 2I_J \sin \overline{\Delta\varphi} \cos \frac{q}{2\hbar} \Phi_B = 2I_J \sin \overline{\Delta\varphi} \cos \frac{\pi\Phi_B}{\Phi_0} \end{aligned}$$

Se trascuro il flusso autoindotto ho  $\Phi_B = \Phi_{\text{ext}}$  e la dipendenza della corrente critica di Josephson dal flusso applicato è semplicemente il modulo del coseno. La fase  $\Delta\varphi$  si adatta per permettere il passaggio della corrente imposta, sino al valore critico.

In caso il flusso autoindotto non sia trascurabile, la curva viene modificata soprattutto nell'intorno dei minimi ( multipli semiinteri di  $\Phi_0$  ) che non raggiungono più lo zero.

## L'elaborazione del segnale

La caratteristica  $V-\Phi$  risulta simile ( triangolare e periodica ) sia per lo SQUID RF che DC.

Per ottenere tale caratteristica i due sistemi richiedono forme diverse di polarizzazione e rivelazione.

Lo **SQUID RF** presenta una tensione a radiofrequenza ai capi del circuito risonante, che viene amplificata con un amplificatore a banda stretta, e rivelata con un diodo o equivalente detector.

Lo **SQUID DC** ( solitamente con caratteristica non isteretica ) può essere polarizzato in corrente, leggendo poi la tensione ai suoi capi. Un altro sistema usato comunemente prevede di polarizzare in tensione lo SQUID, inserendo in serie il primario di un trasformatore. Al suo secondario si leggerà una tensione proporzionale alla variazione nel tempo del flusso. In entrambi i casi allo SQUID viene applicato un flusso di modulazione oscillante.

Se ad esempio la modulazione introduce un flusso sinusoidale

$$\Phi_{BF} = I_{BF} \sin(\omega_{BF} t)$$

$$\text{con } I_{BF} \cong \frac{\Phi_0}{4}$$

La nonlinearietà della curva  $V-\Phi$  introduce distorsioni di tipo “valore assoluto” e quindi:

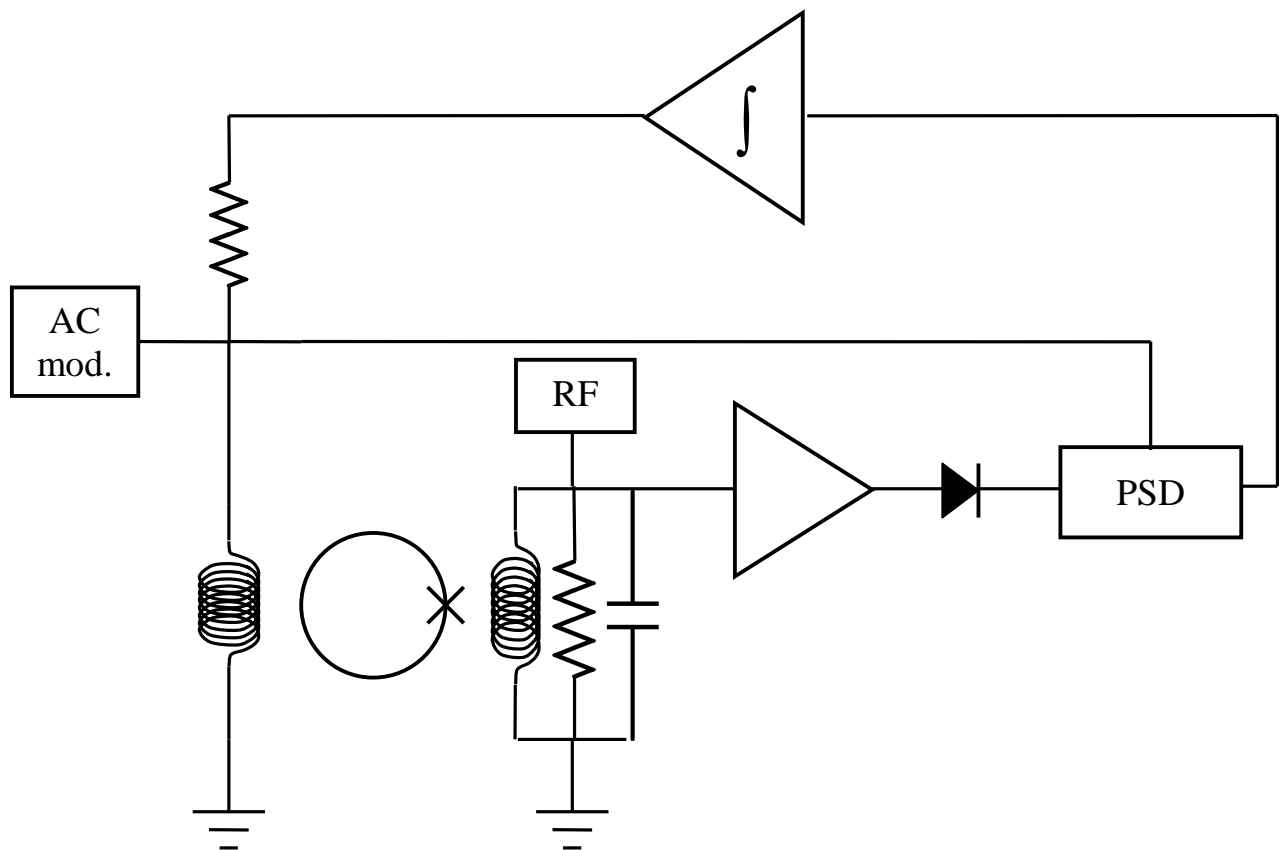
a	si ha	e con la PSD
$\Phi_{DC} = n \cdot \Phi_0$	$V = I_{BF} A \cdot  \sin(\omega_{BF} t) $	0
$\Phi_{DC} = (n + 1/2) \cdot \Phi_0$	$V = -I_{BF} A \cdot  \sin(\omega_{BF} t) $	0
$\Phi_{DC} = (n + 1/4) \cdot \Phi_0$	$V = I_{BF} A \cdot \sin(\omega_{BF} t)$	$ V  = I_{BF} \cdot A$
$\Phi_{DC} = (n + 3/4) \cdot \Phi_0$	$V = -I_{BF} A \cdot \sin(\omega_{BF} t)$	$ V  = -I_{BF} \cdot A$

La rivelazione in fase (PSD=phase sensitive detector) rivela soltanto le componenti sincrone con la modulazione, realizzando un filtro molto stretto. Inoltre la caratteristica periodica si trasforma in una caratteristica ancora periodica, ma con i minimi ed i massimi trasformati in punti di zero cross stabili per simmetria.

Utilizzando questo segnale possiamo linearizzare la risposta del sistema, introducendo un flusso di controreazione (feedback), generato dalla corrente  $I_F$ .

La corrente di feedback ed il flusso relativo dipendono dall'errore in ingresso, che si riduce aumentando il guadagno dell'anello di controreazione.

Generalmente, nei sistemi elettronici degli SQUID, l'amplificatore è seguito da un integratore ideale. In questo caso il guadagno in continua è infinito e l'errore diventa nullo.



Questo sistema elettronico controreazionato si chiama FLL (flux locked loop) in quanto aggancia lo stato stabile ad un minimo della caratteristica periodica  $V-\Phi$ .

A causa della caratteristica periodica, se la controreazione è disattivata, il segnale generato dallo SQUID e dalla catena di amplificazione non cambia se si introduce un numero intero di  $\Phi_0$  nell'anello. Anche con feedback attivo sono possibili transizioni tra stati che differiscono di  $N$  quanti di flusso  $\Phi_0$  concatenati con l'anello, e che risultano indistinguibili all'uscita. Questo inconveniente deve essere considerato nell'utilizzo dello SQUID, mantenendosi in condizioni in cui le transizioni sono impossibili, o monitorando il sistema per contare eventuali salti di flusso.

### Accoppiamento d'ingresso

Per effettuare misure magnetiche, solitamente si desidera poter introdurre nel campo magnetico una bobina di nostra scelta, come dimensione, numero di spire, etc.

Grazie al fatto che la bobina d'ingresso dello SQUID è superconduttrice, se costruiamo anche la bobina di misura con un superconduttore, possiamo effettuare misure di campo magnetico, o di flusso, esternamente allo SQUID.

Il sistema di due bobine SC chiuse in un anello chiuso si chiama **TRASFORMATORE di FLUSSO**.

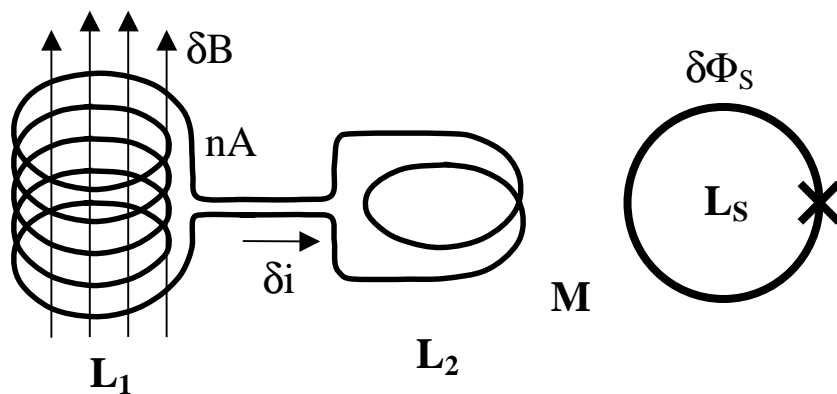
Le equazioni che lo descrivono sono:

$$\delta i (L_1 + L_2) + \delta B \cdot A = 0.$$

$$\delta \Phi = M \delta i = n A \delta B M / (L_1 + L_2)$$

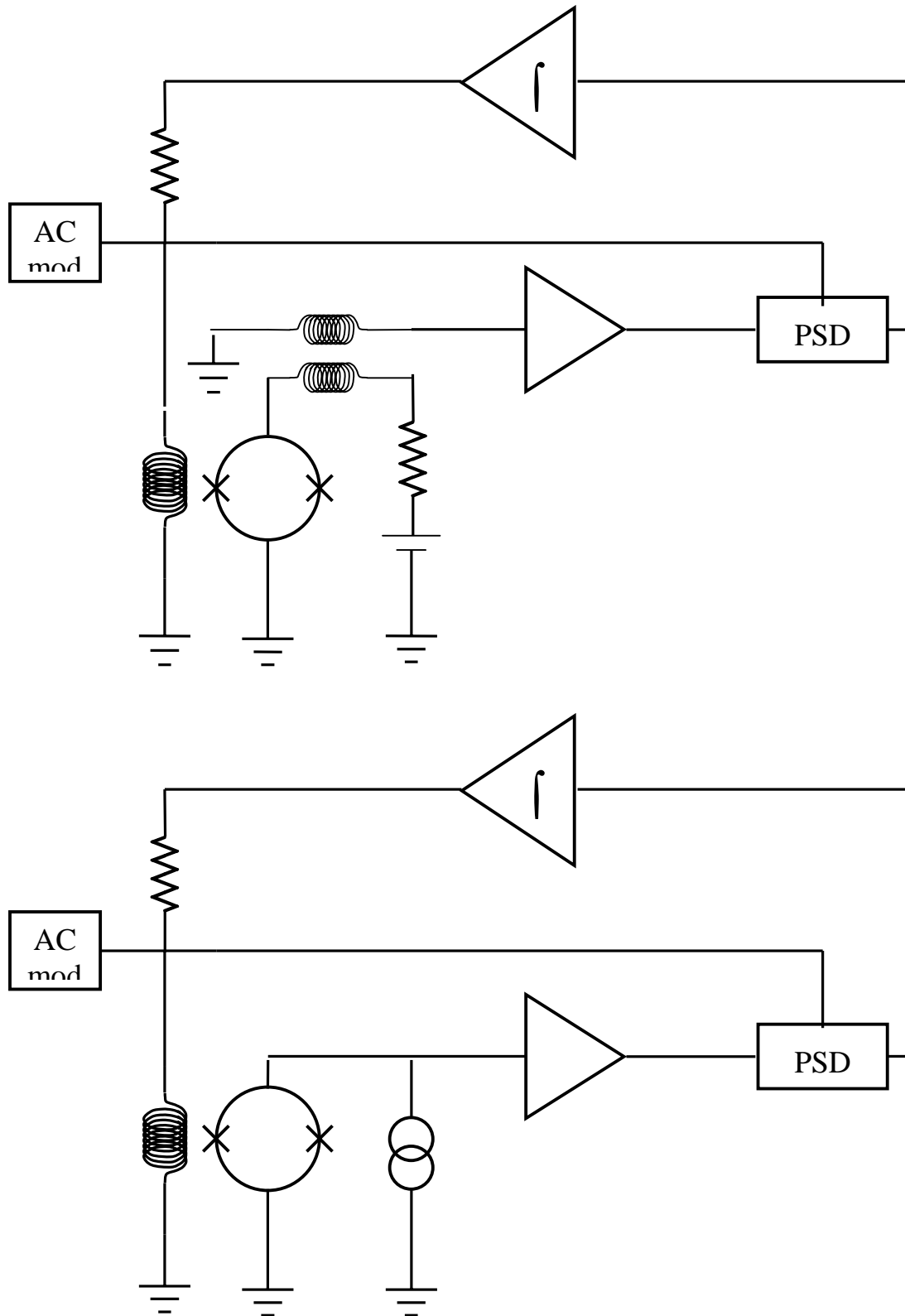
e l'induttanza ottimale all'ingresso è  $L_1 = L_2$ , nel qual caso il segnale d'ingresso si accoppia nello SQUID con un rapporto:

$$\delta \Phi = M \delta i = n A \delta B M / 2 L$$





Nel caso di SQUID in DC, lo schema di massima resta uguale, cambiano solo le polarizzazioni, I metodi per rilevare segnali a basso livello e gli amplificatori relativi.



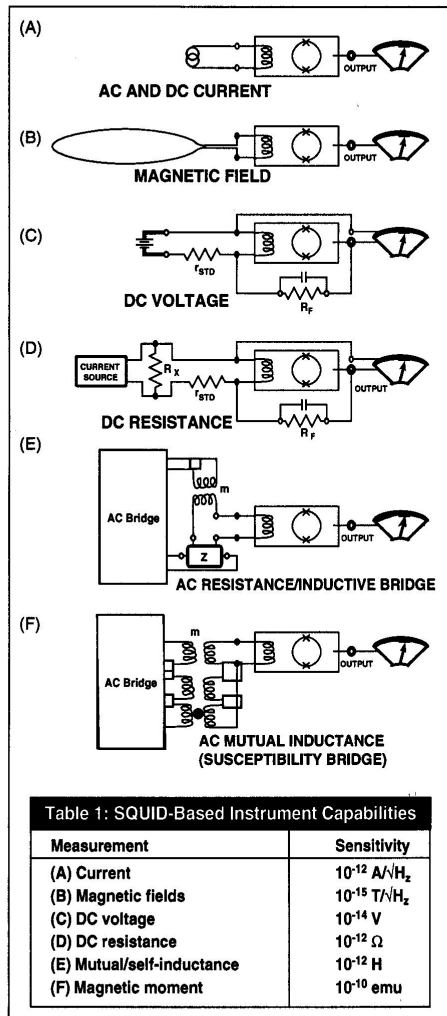


Figure 7. SQUID sensors can take a number of measurement configurations. All components (except for the current source or the AC bridge) to the left of the SQUID input coil are at cryogenic temperatures. All leads at cryogenic temperatures are assumed to be superconducting.

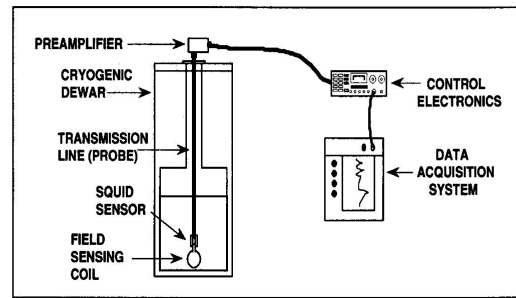


Figure 8. In a simple SQUID magnetometer system, the Dewar can be as small as 2 in. in dia. In field applications, the electronics can be battery operated.

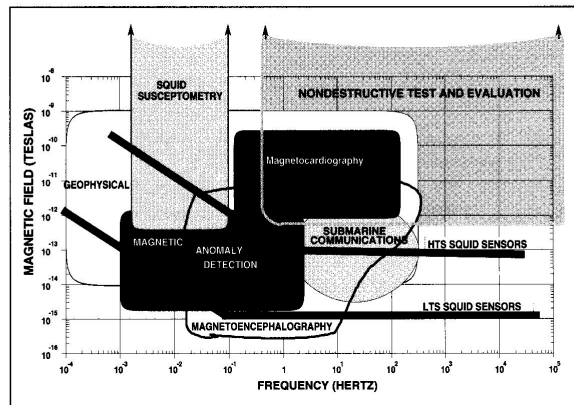


Figure 9. In this plot of magnetic field sensitivity vs. frequency for various applications, the banded lines show the sensitivity limits for commercially available low-temperature superconducting and high-temperature superconducting SQUID sensors.

Alcuni esempi di misuratori di proprietà elettriche che utilizzano SQUIDS

ALCUNE PARTI (SU SFONDO GRIGIO) NON SONO STATE PRESENTATE NELLA LEZIONE.

### Generazione di radiazione da una giunzione Josephson.

Una giunzione polarizzata a  $V \neq 0$  è percorsa da correnti oscillanti, e quindi genera radiazione elettromagnetica.

Le frequenze sono limitate dalla rottura di coppie a  $V > 2\Delta/e$  che ad es. per il Nb è a  $f = 1.3$  THz.

Le potenze sono una frazione della potenza dissipata nella giunzione, che stimiamo moltiplicando la corrente fornita e la tensione di polarizzazione: ad es.  $I = 1$  mA,  $V = 10$   $\mu$ V  $\Rightarrow 10$  nW.

Il disaccoppiamento tra giunzione e spazio vuoto può ridurre di **centinaia** di volte la potenza emessa.

Una strada ancora interessante è l'utilizzo di array di giunzioni, che se sono coerenti aumentano la potenza come  $N^2$ . Quindi un array ad es. bidimensionale di 1000 X 1000 potrebbe riportare a livelli vicino al mW.

### L'influenza della radiazione sulle giunzioni.

Una giunzione irradiata con radiofrequenza modifica la propria caratteristica a causa dell'interazione tra la corrente oscillante preesistente (a  $V \neq 0$ ) e quella indotta.

Se queste due correnti sono alla stessa frequenza, si sincronizzano in fase, e questo modifica anche il comportamento in continua, cioè nella curva comunemente osservabile

In particolare la corrente critica a  $V = 0$  si riduce, mentre sulla caratteristica a  $V \neq 0$  nascono gradini verticali a tensioni:

$$V_n = n \frac{\hbar}{2e} \omega = n \Phi_0 f \quad \text{con} \quad \frac{f}{V_1} = 483.6 \frac{\text{MHz}}{\mu\text{V}}$$

L'ampiezza degli step varia col livello di RF come una funzione di Bessel  
E gli step sono verticali con estrema precisione.

### Standard di tensione

La proporzionalità tra frequenza e tensione dipendente solamente da costanti fondamentali ha suggerito di DEFINIRE la TENSIONE come grandezza derivata dalla frequenza, cioè dal tempo, e di realizzare mediante l'effetto JOSEPHSON lo STANDARD PRIMARIO di TENSIONE.

La realizzazione pratica di tale sistema è stata semplificata enormemente dalla disponibilità di array di giunzioni

La caratteristica di una giunzione

- Rivelatori a larga banda

La corrente critica a tensione nulla è ridotta in presenza di radiazione di qualunque frequenza.

L'andamento è quadratico,

$$J_C(V_{RF}) = J_C(0) \cdot \left[ 1 - (V_{RF} / \Phi_0 \omega)^2 \right]$$

con dipendenza dalla frequenza

Il sistema è sensibile per frequenze che si estendono sino al lontano infrarosso.

Rivelatori di questo tipo sono realizzati con giunzioni a punta, aventi bassa capacità.

- Rivelatori selettivi

### SQUID anomali

Possiamo utilizzare uno SQUID non-isteretico per misurare l'ampiezza di una radiofrequenza con grande precisione

Lo SQUID funziona in questo caso come amplificatore parametrico.

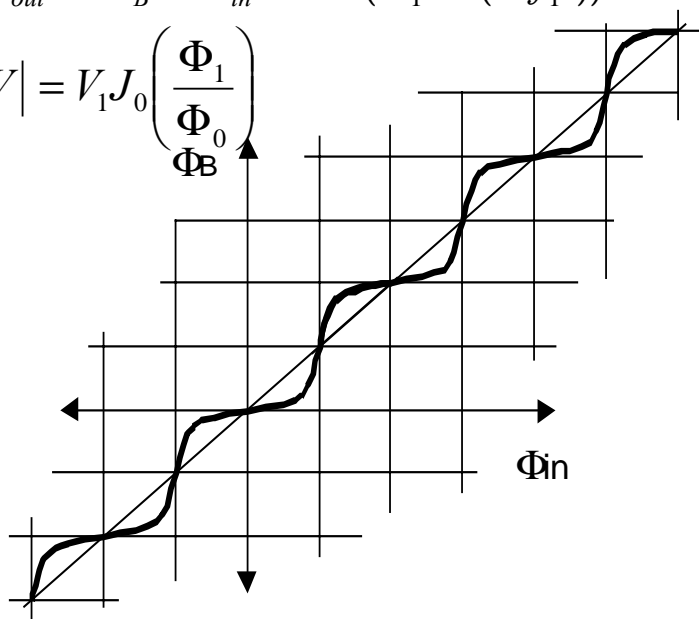
La nonlinearietà della caratteristica è tale che se:

$$\Phi_{in} = \Phi_1 \sin(2\pi f_1 t)$$

allora

$$\Phi_{out} = \Phi_B - \Phi_{in} \propto \sin(\Phi_1 \sin(2\pi f_1 t))$$

$$|V| = V_1 J_0 \left( \frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)$$



105 dB di dinamica  
 $10^{-3}$  dB di risoluzione  
 da DC a 1 GHz

In realtà invece del  
 flusso conviene  
 considerare il campo H  
 incidente (in) e riflesso  
 (out) dallo SQUID in  
 fondo alla guida.

### Termometria QUANTISTICA

La potenza di rumore per unità di banda passante generata da una resistenza R a temperatura T è:  $S(\omega) = V_n^2/R = 4 k T$

#### Utilizzando uno SQUID

E' possibile misurare la potenza di rumore con un un preamplificatore di tensione a SQUID, e si ottiene uno strumento assoluto purchè la banda passante sia ben nota.

Per quanto riguarda la sensibilità, con uno SQUID commerciale, con una sensibilità energetica di  $10^{-28} \text{ J Hz}^{-1}$ , si può ottenere una precisione di 1 mK a 100 mK con un tempo di misura di 100 s.

Polarizzando una giunzione Josephson

Uno SQUID resistivo è formato da uno SQUID a una giunzione il cui loop è interrotto da una sezione resistiva. L'anello si trasforma quindi in una Giunzione Josephson in parallelo con una resistenza.

Polarizzando il sistema ad una tensione finita, otteniamo che la corrente oscillante nella giunzione ( $V = 0$ ) viene modulata in fase dalla tensione di noise della resistenza.

E' stato dimostrato che lo spettro di noise in questo sistema viene compresso in una banda passante di larghezza direttamente proporzionale alla temperatura assoluta. ( $df = 4 \pi k T R / \Phi_0^2$ ) così come lo è  $S(\omega)$ .